$$N_{2i} = \{x \in N_{2i-1} \mid \operatorname{Im}\langle x \mid a_i\rangle = \sup_{y \in N_{2i-1}} \operatorname{Im}\langle y \mid a_i\rangle\}$$

form (for $i = 1, 2, \ldots$) a monotonically decreasing sequence of sets, whose intersection consists of exactly one unit element $r_1 \in L_R$. The repetition of this procedure applied to the projection operators

$$R^{(1)} := R - |r_1\rangle\langle r_1|, \ldots, \; R^{(n)} := R^{(n-1)} - |r_n\rangle\langle r_n|$$

obviously yields a unique partition of R in elementary projection operators $|r_i\rangle\langle r_i|$.

Acknowledgements

The author would like to thank Prof. G. SÜSSMANN and Prof. H. DINGES for many helpful discussions.

Modelle kraftfreier Magnetfelder

R. WAGNER *

Lehrstuhl für Theoretische Physik B Technische Universität Braunschweig

(Z. Naturforsch. **26 a**, 1753—1762 [1971]; eingegangen am 1. April 1969)

A method for computing force-free magnetic fields of known anomality $\alpha \neq$ const is described. The procedure is introduced by treating plane fields; thereby it is proved that force-free fields of constant strength are alyaws plane. In general case the surfaces $\alpha =$const are chosen as coordinate surface of an orthogonal curvilinear coordinate system. In this system the magnetic field is described by a linear partial differential equation which can be solved numerically. Making use of simplifying assumptions about symmetries in the coordinate systems, analytic solutions are found which are extended on constant α.

The formulae derived can be used to decide if to a given geometry a force-free field does exist. Existing fields can be computed immediately. The results are illustrated by examples.

Im Jahre 1951 wies LUNDQUIST [1] erstmals darauf hin, daß die magnetohydrostatischen Gleichungen die Existenz von Magnetfeldern zulassen, in denen der sie erzeugende Strom in Magnetfeldrichtung fließt. In diesen Feldern verschwindet die Lorentz-Kraft, weswegen man von „kraftfreien Magnetfeldern" spricht. Ist $\mathfrak{j}$ die Stromdichte, $\mathfrak{h}$ die magnetische Feldstärke, so gilt also:

$$\mathfrak{j} \times \mathfrak{h} = 0 \tag{1}$$

bzw. wegen $\quad \operatorname{rot} \mathfrak{h} = \mathfrak{j}$,

$$\mathfrak{j} = \operatorname{rot} \mathfrak{h} = \alpha\, \mathfrak{h}. \tag{2}$$

Dabei ist α ein ortsabhängiger Proportionalitätsfaktor. (Behandelt man dynamische Probleme, so ist α auch zeitabhängig. Im folgenden wollen wir uns jedoch auf den statischen Fall beschränken, in dem $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{h}$ und daher auch α zeitunabhängig sind.)

Wegen $\quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0 \qquad (3)$

folgt aus (2): $\quad (\mathfrak{h}, \operatorname{grad} \alpha) = 0\,. \qquad (4)$

Eine besondere Lösungsklasse von (2), (3) sind die stromlosen Magnetfelder. Für sie ist $\alpha \equiv 0$, und man spricht von einem trivialen kraftfreien Magnetfeld. Lösungen für $\alpha \not\equiv 0$ sind in speziellen Koordinatensystemen, d. h. unter Annahme spezieller Symmetrien, seit längerem bekannt [2–9]. Der Fall $\alpha =$ const – eine Lösung von (2) heißt dann ein TRKAL-Feld – wurde von CHANDRASEKHAR und KENDALL [10] 1957 vollständig gelöst. TRKAL-Felder zeichnen sich dadurch aus, daß sie immer divergenzfrei sind, so daß Gl. (3) keine zusätzliche Bedingung liefert. Außerdem sind sie die einzigen kraftfreien Felder, für die $\mathfrak{j} \times \operatorname{rot} \mathfrak{j} = 0$ gilt. Denn einmal sieht man sofort, daß in TRKAL-Feldern diese Bedingung gilt. Ist andererseits die Stromdichte zu ihrer Rotation parallel, so folgt mit (4) wegen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{j} = \operatorname{rot} \alpha\, \mathfrak{h} = \alpha\, \mathfrak{j} + \operatorname{grad} \alpha \times \mathfrak{h},$$

daß $\operatorname{grad} \alpha \equiv 0$, also $\alpha =$ const gelten muß. In analoger Weise sieht man: Ist $\mathfrak{h}$ ein kraftfreies Magnet-

* Jetzige Adresse: Porz-Lind, Im Linder Bruch 68.
1 S. LUNDQUIST, Ark. Fysik **2**, 361 [1951].
2 R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Astrophys. **31**, 263 [1954].
3 A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **12 a**, 855 [1957].
4 S. CHANDRASEKHAR, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, 1 [1956].
5 S. K. MAJUMDAR, Z. Astrophys. **47**, 44 [1959].
6 G. J. BUCK, J. Appl. Phys. **36**, 2231 [1965].
7 R. N. HENRIKSEN, Ap. Letters **1**, 37 [1967].
8 F. G. FREIRE, Amer. J. Phys. **34**, 567 [1962].
9 G. S. MURTY, Ark. Fysik **21**, 203 [1962].
10 S. CHANDRASEKHAR u. P. C. KENDALL, Ap. J. **126**, 457 [1957].

feld, so ist $\beta\mathfrak{h}$ kein kraftfreies Magnetfeld, sofern $\operatorname{grad}\beta \not\equiv 0$ ist. Ein kraftfreies Feld ist also (bis auf einen konstanten Faktor) durch den Feldlinienverlauf völlig bestimmt. Diesen Sachverhalt hat RICHTER [11] benutzt, um mit Hilfe differentialgeometrischer Methoden zu vorgegebenem Richtungsfeld *das* kraftfreie Magnetfeld zu konstruieren.

Die kraftfreien Magnetfelder fallen in die Klasse der Beltrami-Felder. Diese sind in der Hydrodynamik seit langem bekannt. So wurden für (2) spezielle Lösungen schon von BELTRAMI [12] und CALDONAZZO [13] angegeben. BJØRGUM [14] sowie BJØRGUM und GODAL [15] befaßten sich eingehend mit den allgemeinen Eigenschaften dieser Felder. Sie gaben bereits 1952 die allgemeine Darstellung eines TRKAL-Feldes an und ergänzten ihre Ergebnisse durch eine Reihe von Feldliniendiagrammen.

In letzter Zeit sind kraftfreie Magnetfelder wiederholt im Zusammenhang mit astrophysikalischen Fragen diskutiert worden. Nach MOGILEVSKIY [16] sind sie für die Teilchenströme, die von der Sonne in den interplanetaren Raum entweichen, von Bedeutung; nach STURROCK [17] spielen sie für die Theorie der Filamente auf der Sonne eine Rolle. Außerdem könnten sie für die Magnetfelder der Sonnenflecken wichtig sein [18, 19]. Schließlich glauben IOSPHA et al. [20], aus Magnetfeldmessungen in verschiedenen Schichten der Sonnenatmosphäre auf vorhandene kraftfreie Felder schließen zu können.

Im Hinblick auf diese Anwendungen ist es wünschenswert, eine große Anzahl von Modellen kraftfreier Magnetfelder zur Verfügung zu haben. Im folgenden sollen solche Modelle in allgemeinen Koordinatensystemen zu vorgegebenem Verhältnis Stromstärke zu Magnetfeldstärke, also zu vorgegebenem bestimmt werden. Insbesondere bedeutet das, daß die Geometrie des Feldes, d. h. die Lage der magnetischen Flächen, als bekannt vorausgesetzt wird.

I. Ebene kraftfreie Felder

Zur Veranschaulichung der Methode betrachten wir zunächst den einfachen Fall, daß die gesuchten Modelle eben sind. Wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z), in welchem die Ebenen $z = \text{const}$ die „Magnetfeldebenen“ sind, so gilt $\mathfrak{h} = (H_x, H_y, 0)$. Für ein Feld dieser Gestalt muß $\alpha = \alpha(z)$ gelten, wobei $d\alpha/dz \equiv 0$ zugelassen ist.

Um das einzusehen, schreiben wir (2), (3) ausführlicher an:

$$-\partial H_y/\partial z = \alpha H_x , \tag{5}$$

$$\partial H_x/\partial z = \alpha H_y , \tag{6}$$

$$\partial H_y/\partial x - \partial H_x/\partial y = 0 , \tag{7}$$

$$\partial H_x/\partial x + \partial H_y/\partial y = 0 . \tag{8}$$

Wegen unserer Voraussetzungen für $\mathfrak{h}$ folgt aus (4):

$$(\mathfrak{h}, \operatorname{grad}\alpha - \mathfrak{e}_z\,\alpha_z) = 0 . \tag{9}$$

Dabei ist $\mathfrak{e}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung und $\alpha_z = \partial\alpha/\partial z$. (Analog schreiben wir: $\alpha_y = \partial\alpha/\partial y$, $\alpha_x = \partial\alpha/\partial x$.)
Weiter ist $\{\operatorname{grad}\alpha - \mathfrak{e}_z\,\alpha_z\} \times \mathfrak{h} = 0$, da aus (4) bis (8)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) = 0 = \frac{\partial(\alpha H_y)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha H_x)}{\partial y} = \alpha_x H_y - \alpha_y H_x$$

folgt.

Wegen (9) gilt daher

$$\operatorname{grad}\alpha - \mathfrak{e}_z\,\alpha_z = 0 ,$$

was $\alpha = \alpha(z)$ bedeutet, wobei $\alpha_z = 0$ noch möglich ist.

Umgekehrt können wir zu jedem $\alpha = \alpha(z)$ aus den Gln. (5) – (8) *alle* kraftfreien Felder angeben. Dabei beachten wir zunächst, daß (8) aus (5) – (7) folgt, also beim gewählten Koordinatensystem für alle Lösungen von (5) – (7) automatisch erfüllt ist. (5) und (6) ziehen wir zu

$$\frac{\partial}{\partial z}\,(H_x - i\,H_y) = i\,\alpha(H_x - i\,H_y)$$

[11] E. RICHTER, Z. Phys. **159**, 194 [1960].
[12] E. BELTRAMI, Rend. Inst. Lombardo (2) **22**, 121 [1889].
[13] B. CALDONAZZO, Rend. Inst. Lombardo (2) **59**, 657 [1926].
[14] O. BJØRGUM, Univers. Bergen Årbok 1951, Naturv. rekke Nr. 1, 86.
[15] O. BJØRGUM u. T. GODAL, Univ. Bergen Årbok 1952, Naturv. rekke Nr. 13, 1.
[16] E. I. MOGILEWSKIY, Geomagn. and Aeron. **1**, 139 [1961]; **2**, 37 [1962]; **4**, 166 [1964]; Bull Acad. Sci. USSR, Phys. Ser. **29**, 1713.
[17] P. A. STURROCK u. E. T. WOODBURY, Proc. Intern. School “Enrico Fermi”, Course 39: Plasma Astrophysics, p. 155 [1967].
[18] M. M. MOLODENSKIY, Astron. Zh. **43**, 727 [1966].
[19] E. SCHATZMANN, IAU-Symp. 22, ed. R. LÜST, p. 377 [1965].
[20] B. A. IOSPHA, E. I. MOGILEVSKIY u. W. N. OBRIDKO, Space Research IV, 789 [1964].

zusammen; i ist die imaginäre Einheit. Die allgemeine Lösung außerhalb neutraler Punkte lautet:

$$H_x - i\, H_y = F(x,y)\, \exp\{i \textstyle\int \alpha\, \mathrm{d}z\}\,.$$

Die komplexe Funktion F zerlegen wir folgendermaßen:

$$F(x,y) = G(x,y)\, \exp\{i\, g(x,y)\}\,.$$

Dabei sind $G(x,y)$, $g(x,y)$ reelle Funktionen. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned} H_x &= G(x,y)\, \cos\{\textstyle\int \alpha\, \mathrm{d}z + g(x,y)\}\,, \\ H_y &= -G(x,y)\, \sin\{\textstyle\int \alpha\, \mathrm{d}z + g(x,y)\}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Für die Funktionen G, g liefert (7):

$$(G_y + G\, g_x)\, \cos\{\textstyle\int \alpha\, \mathrm{d}z + g\} + (G_x - G\, g_y)\, \sin\{\textstyle\int \alpha\, \mathrm{d}z + g\} = 0\,.$$

(die Indizes x, y bezeichnen wieder die partiellen Ableitungen).

Daraus gewinnen wir die äquivalenten Gleichungen

$$G_y = -G\, g_x\,, \qquad G_x = G\, g_y\,. \tag{11}$$

Also gilt im betrachteten Gebiet außerhalb neutraler Punkte (Δ = 2-dim. Laplace-Operator)

$$\Delta g = 0\,, \qquad \Delta \ln G = 0\,.$$

Die Orte $\mathfrak{h} = 0$ treten als singuläre Punkte von $\ln G$ auf. Zu vorgegebenem $\alpha = \alpha(z)$ erhalten wir daher alle kraftfreien Felder, indem wir z. B. $\Delta \ln G = 0$ (unter Einschluß etwaiger singulärer Punkte) lösen und dann g aus (11) bestimmen.

Für $G = \mathrm{const}$ erhalten wir insbesondere kraftfreie Magnetfelder konstanter Feldstärke, wie sie auch von KRAUSE [21] angegeben wurden.

Damit sind schon alle kraftfreien Felder, deren Betrag im gesamten Raum konstant ist, bekannt.

Den Beweis führen wir in mehreren Schritten. Nach KRAUSE [21] müssen die Linien eines konstanten kraftfreien Feldes gerade sein. Daraus folgt sofort:

(I) Gibt es in einem kraftfreien Feld konstanter Stärke *eine* Magnetfeldebene, so ist das Feld eben. Wegen der Eindeutigkeit der Feldstärke und dem Fehlen neutraler Punkte darf nämlich keine Feldlinie die ausgezeichnete Ebene schneiden, es sei denn, sie liegt völlig in ihr.

(II) Mit der Methode von KRAUSE [21] können wir zeigen: Um jeden Punkt des Raumes gibt es eine Umgebung, so daß die in ihr liegenden Magnetfeldflächen eben sind.

[21] F. KRAUSE, Beitr. Plasmaphys. 4, 1 [1964].

Dann muß aber gelten:

(III) Sind alle Feldlinien in *einer* Umgebung *eines* Punktes parallel, so ist das Feld eben. Sind alle Feldlinieen parallel, so ist die Aussage trivial. Sind sie es nicht, so betrachten wir eine Ebene senkrecht zum gegebenen Parallelenbündel und suchen in ihr ein Gebiet G auf, das von Feldlinien durchsetzt wird, die parallel zum vorgegebenen Bündel sind, und für dessen Randpunkte gilt: In jeder ihrer Umgebungen liegen Feldlinien, die zum gegebenen Bündel nicht parallel sind. Besteht der Rand R von G aus zwei paralellen Geraden, so ist wegen (I) alles bewiesen. Anderenfalls gibt es sicher einen Randpunkt und um den eine Umgebung, in der der Rand nicht geradlinig ist. Die ebenen Magnetfeldflächen, die in dieser Umgebung (oder einer kleineren) nach (II) existieren, enthalten dann teilweise Punkte von G, und es folgt der Widerspruch zur Annahme, daß es „unmittelbar" außerhalb $G \cup R$ keine zum gegebenen Bündel parallelen Feldlinien gibt. Nach diesen Überlegungen ist einzusehen, daß *jedes kraftfreie Feld konstanter Stärke eben ist.*

Denn, gehen wir von einem beliebigen Punkt gemäß (II) aus, so können wir über ein beliebiges der Magnetfeldflächenstücke aus dieser Umgebung wegen der Geradlinigkeit der Feldlinien einen Ebenenstreifen finden, in dem Feldlinien liegen. Ist die Trägerebene dieses Streifens eine Magnetfeldfläche, so ist wegen (I) alles bewiesen. Ist das nicht der Fall, so gibt es in dieser Ebene eine Gerade mit folgender Eigenschaft: Auf der einen Seite von ihr liegen Feldlinien in der Ebene, auf der anderen (zumindest „unmittelbar") nicht. Wenden wir auf einen Punkt dieser Geraden die Überlegungen (II) an, so muß ein Teil der ebenen Magnetfeldflächenstücke die Trägerebene schneiden. Insbesondere existiert daher ein Bündel paralleler Feldlinien, so daß das Feld wegen (III) eben ist.

II. Der allgemeine Fall

Die Berechnungen im letzten Abschnitt konnten durchgeführt werden, weil durch die Wahl des Koordinatensystems $\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0$ automatisch erfüllt wurde und sich außerdem die aus $\operatorname{rot} \mathfrak{h} = \alpha\, \mathfrak{h}$ folgenden gekoppelten Differentialgleichungen wegen $H_z = 0$ beträchtlich vereinfachten. Es liegt nahe, diese Methode zu verallgemeinern. Dazu nehmen wir an, daß wir die Flächen $\alpha = \mathrm{const}$ zu einem dreifach orthogonalen Flächennetz ergänzen können. Inwieweit das möglich ist, soll später erörtert werden. Zunächst sei nur angemerkt, daß der Fall $\operatorname{grad} \alpha \equiv 0$, für den ja allgemeine Lösungen existieren [9, 13], dieser Behandlung nicht unmittelbar zugänglich sind.

Nach unserer Annahme können wir orthogonale krummlinige Koordinaten einführen. Wir wählen: u^1, u^2, $u^3 = \alpha$. Die metrischen Koeffizienten seien $h_1 = \sqrt{g_{11}}$, $h_2 = \sqrt{g_{22}}$, $h_3 = \sqrt{g_{33}}$. Das Magnetfeld besitzt die Komponenten (bezogen auf Einheitsvektoren) $\mathfrak{h} = (H^1, H^2, H^3)$. Wegen (3) folgt: $H^3 = 0$.

Im folgenden wird zur Vereinfachung die Ableitung $\partial F / \partial u^i = (F)_i$ abgekürzt.

Für das Magnetfeld gelten nach (2) die folgenden Differentialgleichungen:

$$-(H^2 h_2)_3 = u^3 h_3 h_2 H^1, \tag{12}$$

$$(H^1 h_1)_3 = u^3 h_1 h_3 H^2, \tag{13}$$

$$(H^1 h_1)_2 - (H^2 h_2)_1 = 0\,. \tag{14}$$

Es zeigt sich unmittelbar, daß

$$\operatorname{div} \mathfrak{h} = \frac{1}{g} \{ (h_2 h_3 H^1)_1 + (h_1 h_3 H^2)_2 \} = 0$$

automatisch erfüllt ist. Dabei setzen wir hier wie im folgenden voraus, daß wir uns außerhalb etwaiger Singularitäten des Koordinatensystems befinden, so daß $g = h_1 h_2 h_3 \neq 0$ ist.

Die Schwierigkeit bei der Lösung von (12) bis (14) besteht darin, daß im Gegensatz zu (5) – (7) zusätzliche Ortsfunktionen $h_i(u^1, u^2, u^3)$ (für $i = 1, 2, 3$) auftreten. Daher sind wir bei der Diskussion der Lösungsmannigfaltigkeiten dazu gezwungen, Fallunterscheidungen hinsichtlich der funktionalen Abhängigkeiten der h_i zu machen. Bevor wir dies tun, wollen wir jedoch aus (12) – (14) einige Folgerungen ziehen.

Zunächst erweist es sich als zweckmäßig, die Transformation $u^4 = \int u^3 \, du^3$ durchzuführen. Wir erhalten aus (12), (13):

$$-(H^2 h_2)_4 = h_3 h_2 H^1, \tag{15}$$

$$(H^1 h_1)_4 = h_3 h_1 H^2. \tag{16}$$

Weiter wollen wir für das folgende voraussetzen, daß im zugrunde liegenden Gebiet die jeweiligen Funktionen hinreichend oft stetig differenzierbar sind. Aus (14) und (16) folgt dann:

$$(H^2 h_2)_{14} = h_3 \frac{h_1}{h_2} (H^2 h_2)_2 + (H^2 h_2) \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_2. \tag{17}$$

Analog finden wir:

$$-(H^2 h_2)_{24} = \frac{h_3 h_2}{h_1} (H^2 h_2)_1 + (H^1 h_1) \left(\frac{h_3 h_2}{h_1} \right)_2 \tag{18}$$

$$(H^1 h_1)_{14} = \frac{h_3 h_1}{h_2} (H^1 h_1)_2 + (H^2 h_2) \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_2, \tag{19}$$

$$-(H^1 h_1)_{24} = \frac{h_3 h_2}{h_1} (H^1 h_1)_1 + (H^1 h_1) \left(\frac{h_3 h_2}{h_1} \right)_1. \tag{20}$$

Außerdem ergeben sich aus (15) und (16) die Differentialgleichungen:

$$(H^2 h_2)_{44} - \left(\ln \frac{h_3 h_2}{h_1} \right)_4 (H^2 h_2)_4 + (h_3)^2 (H^2 h_2) = 0\,, \tag{21}$$

$$(H^1 h_1)_{44} - \left(\ln \frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_4 (H^1 h_1)_4 + (h_3)^2 (H^1 h_1) = 0\,. \tag{22}$$

Aus (17) folgt durch nochmalige Differentiation nach u^4:

$$(H^2 h_2)_{144} = \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right) (H^2 h_2)_{24} + \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_4 (H^2 h_2)_2 + (H^2 h_2)_4 \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_2 + (H^2 h_2) \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_{23}. \tag{23}$$

Weitere Umformungen unter Benutzung von (17) und (18) liefern:

$$(H^2 h_2)_{144} - (H^2 h_2)_{14} \left(\ln \frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_4 + (h_3)^2 (H^2 h_2)_1 = -(H^1 h_1) \, [(h_3)^2]_2 + (H^2 h_2) \frac{h_3 h_1}{h_2} \left(\ln \frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_{24}. \tag{24}$$

Andererseits erhalten wir aus (21) durch Differentiation nach u^1:

$$(H^2 h_2)_{144} - \ln \left(\frac{h_3 h_2}{h_1} \right)_4 (H^2 h_2)_{14} - \left(\ln \frac{h_3 h_2}{h_1} \right)_{14} (H^2 h_2)_4 + (h_3)^2 (H^2 h_2)_1 + [(h_3)^2]_1 H^2 h_2 = 0\,. \tag{25}$$

Ein Vergleich der beiden Gleichungen für $(H^2 h_2)_{144}$ ergibt:

$$2 \left(\ln \frac{h_2}{h_1} \right)_4 (H^2 h_2)_{14} + \left(\ln \frac{h_3 h_2}{h_1} \right)_{14} (H^2 h_2)_4 - [(h_3)^2]_1 (H^2 h_2) = -(H^1 h_1) \, [(h_3)^2]_2 + (H^2 h_2) \frac{h_3 h_1}{h_2} \left(\ln \frac{h_3 h_1}{h_2} \right)_{24}. \tag{26}$$

Diese Differentialgleichung ist einer numerischen Behandlung auf jeden Fall unmittelbar zugänglich. Denn ersetzen wir $(H^2 h_2)_{14}$ aus (17) und $(H^1 h_1)$ aus (15), so erhalten wier eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für $(H^2 h_2)$. Unter unseren Voraussetzungen können wir mit Hilfe der Charakteristikenmethode sicher eindeutige Integralflächen finden. $H^1 h_1$ gewinnen wir dann aus (15). Die Gln. (14) und (16) liefern zusätzliche Bedingungen, die darüber entscheiden, ob die gefundenen Funktionen wirklich ein kraftfreies Feld darstellen. [Natürlich können wir (26) auch auf eine Differentialgleichung für $H^1 h_1$ umschreiben. Die Lösung des Problems verläuft dann entsprechend.]

Im folgenden wollen wir untersuchen, wann (26) eine in geschlossener Form darstellbare Lösung hat, die auf ein kraftfreies Magnetfeld führt. Dazu nehmen wir Fallunterscheidungen vor, die die Annahme bestimmter Symmetrien in dem betrachteten Gebiet bedeuten:

$$(h_2/h_1)_4 \neq 0 \quad \text{und} \quad (h_2/h_1)_4 = 0\,.$$

III. Der Fall $(h_2/h_1)_4 \neq 0$

Die Klasse von Lösungen in Koordinatensystemen, in denen die metrischen Koeffizienten diese Eigenschaft haben, umfaßt noch so viele grundsätzlich verschiedene Typen, daß weitere Unterscheidungen nötig sind.

a) Die Funktionen h_3, h_2/h_1 hängen nur von u^4 ab

Dann folgt aus (26) sofort:

$$(H^2 h_2)_{14} = 0$$

und damit aus (25)

$$(H^2 h_2)_1 = 0\,.$$

Also gilt nach (14) $(H^1 h_1)_2 = 0$ und nach (15), (16) dann $(H^2 h_2)_2 = 0 = (H^1 h_1)_1$.

In diesem Fall sind $H^1 h_1$, $H^2 h_2$ nur Funktionen von u^4. Die Differentialgleichung (21) für $H^1 h_1$ wird gewöhnlich; nach der Transformation

$$u^5 = \int \frac{h_3 h_1}{h_2}\, \mathrm{d}u^4$$

erhalten wir:

$$(H^1 h_1)_{55} + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 H^1 h_1 = 0\,. \tag{27}$$

Aus (16) folgt $H^2 h_2$. Damit sind in dem betrachteten Gebiet zu dem vorgegebenen a alle kraftfreien Felder bestimmt. [Wir konnten natürlich auch zunächst $H^2 h_2$ aus (22) bestimmen und danach $H^1 h_1$ über (15) berechnen.]

b) Die Funktionen h_3, h_2/h_1 sind bez. u^1 symmetrisch, d. h. es gilt: $(h_3)_1 = 0 = (h_2/h_1)_1$

Dann folgt mit (15) aus (26):

$$2\left(\ln \frac{h_2}{h_1}\right)_4 (H^2 h_2)_{14} - (H^2 h_2)_4 \left(\frac{h_3 h_2}{h_1}\right)^{-1} \cdot [(h_3)^2]_2 = (H^2 h_2) \cdot \left\{\frac{h_3 h_1}{h_2}\left(\ln \frac{h_3 h_1}{h_2}\right)_{24}\right\}. \tag{28}$$

Um zu analytischen Lösungen zu kommen, schränken wir weiter ein:

b_1) $[\ln(h_3 h_1/h_2)]_{24} = 0$,

d. h. für $h_3 h_1/h_2$ gilt die Produktdarstellung:

$$\frac{h_3 h_1}{h_2} = m_1(u^4)\, m_2(u^2)\,. \tag{29}$$

Wegen (15) vereinfacht sich (26):

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_4 (H^2 h_2)_{14} + \frac{h_3 h_2}{h_1} (h_3)_2 (H^1 h_1) = 0\,. \tag{30}$$

Aus (14) und (20) folgt:

$$(H^2 h_2)_{14} = (H^1 h_1)_{24} = -\frac{h_3 h_2}{h_1} (H^1 h_1)_1\,. \tag{31}$$

Daher erhalten wir aus (30) nach Integration

$$(H^1 h_1) = F(u^2, u^4) \cdot \exp\left\{\frac{(h_3)_2}{(h_2/h_1)_4}\, u^1\right\}. \tag{32}$$

$F(u^2, u^4)$ ist eine noch zu bestimmende Funktion. Durch Einsetzen von (32) in (19) erhalten wir eine zusätzliche Bedingung für die metrischen Koeffizienten

$$\frac{(h_3)_2}{(h_2/h_1)_4} \cdot \left(\frac{(h_3)_2}{(h_2/h_1)_4}\right)_4 = \frac{h_3 h_1}{h_2}\left(\frac{(h_3)_2}{(h_2/h_1)_4}\right)_2. \tag{33}$$

Entsprechend ergibt sich aus (20):

$$\left(\frac{(h_3)_2}{(h_2/h_1)_4}\right)_4 \cdot \left(\frac{(h_3)_2}{(h_2/h_1)_4}\right)_2 = 0\,. \tag{34}$$

(33) und (34) liefern

$$(h_3)_2/(h_2/h_1)_4 = \text{const}\,. \tag{35}$$

Aus (16) gewinnen wir

$$H^2 h_2 = (h_2/h_3 h_1)\, (F)_4 \exp\{\text{const}\, u^1\}\,. \tag{36}$$

Setzen wir (36) und (32) in (14) ein, so erhalten wir

$$(F)_4 \cdot \text{const}(h_2/h_3 h_1) = (F)_2\,. \tag{37}$$

Die Bedingung (35) kann durch $(h_3)_2=0$ erfüllt werden.

$b_{11})$ $(h_3)_2=0$

Dann gilt wegen (37)

$$(F)_2=0\,,$$

also

$$H^1\,h_1=F(u^4)\,,$$
$$H^2\,h_2=(h_2/h_3\,h_1)\,(F)_4\,. \qquad (38)$$

Dabei ist $F(u_4)$ durch (23) gegeben.

Transformieren wir noch

$$u^5=\int m_1(u^4)\,\mathrm{d}u^4\,,$$

so erhalten wir

$$(F)_{55}+(h_3/m_1)^2\,F=0\,. \qquad (39)$$

Nach Lösen dieser Differentialgleichung erhalten wir $H^2\,h_2$ aus (38).

$b_{12})$ *Ist const* $\neq 0$,

so folgt aus (37) für F die Abhängigkeit

$$F=F(a)\,,\quad a=\int(m_1/\mathrm{const})\,\mathrm{d}u^4+\int(1/m_2)\,\mathrm{d}u^2.$$

Ebenso folgt aus (29) und (35):

$(h_2/h_1)\;m_2\,,\;(h_3/m_1)$ sind Funktionen von a.

Schließlich liefert (22):

$$F''+\left(\frac{\mathrm{const}\;h_3}{m_1}\right)^2F=0\,. \qquad (40)$$

Dabei ist $F'=\mathrm{d}F/\mathrm{d}a$.

Das Ergebnis lautet also:

Sind h_3 und h_2/h_1 bezüglich u^1 symmetrisch und gilt

$$h_3\,h_1/h_2=m_1(u^3)\cdot m_2(u^2)\,,$$

so existiert genau dann ein kraftfreies Magnetfeld, wenn $(h_3)_2/(h_2/h_1)_4$ konstant ist.

Ist $(h_3)_2=0$, so ist die Lösung durch (38), (39) gegeben; ist $(h_3)_2\neq 0$, so ist die Lösung durch (32), (36) in Verbindung mit (40) festgelegt.

$b_2)$ Es liegt nahe, auch die Lösung für den Fall $(h_3)_2=0$, $[\ln(h_3\,h_1/h_2)]_{24}\neq 0$ zu versuchen. Die entsprechenden Rechnungen sind sehr langwierig, weswegen sie hier nicht explizit dargestellt werden sollen. Es ergibt sich, daß in diesem Falle keine kraftfreien Magetfelder existieren.

c) In zu b) entsprechender Weise nehmen wir an, daß h_3 und h_2/h_1 in u^2 symmetrisch sind. Zur Lösung transformieren wir folgendermaßen:

$$u'^1=u^2,\qquad u'^2=-u^1,\qquad u'^3=u^3,$$
$$H'^1=H^2,\qquad H'^2=-H^1\,.$$

Dann ist

$$h_1'=h_2\,,\qquad h_2'=h_1\,,\qquad h_3'=h_3\,.$$

Da das Gleichungssystem gegen diese Transformation invariant ist, können wir die Lösungen von b) unmittelbar auf c) übertragen.

Die Fälle a) – c) waren analytisch lösbar, weil die Voraussetzungen sowohl (26) als auch (17) bis (20) auf Gleichungen in 2 abhängigen Variablen reduzierten. In allgemeineren als den betrachteten Fällen ist das – wenn überhaupt – nur noch für (26) möglich. Die dadurch erzielten Vereinfachungen erlauben es jedoch nicht, unmittelbare Lösungsbedingungen anzugeben. Wir wollen uns daher jetzt dem zweiten Fall, $(h_2/h_1)_4=0$ im betrachteten Gebiet, zuwenden.

IV. Der Fall $(h_2/h_1)_4=0$

Der Vorteil dieser Bedingung besteht darin, daß in (26) der Term mit der zweiten Ableitung von $H^2\,h_2$ verschwindet. Mit Hilfe von (15) erhalten wir wegen $(h_2/h_1)_4=0$:

$$(H^2\,h_2)_4\{(\ln h_3)_{14}-(h_3\,h_2/h_1)^{-1}[(h_3)^2]_2\}=(H^2\,h_2)\{(\ln h_3)_{24}(h_3\,h_1/h_2)+[(h_3)^2]_1\}\,. \qquad (41)$$

Im folgenden schreiben wir abkürzend

$$(\ln h_3)_{14}-2\,(h_1/h_2)\,(h_3)_2=\beta\,,$$
$$(\ln h_3)_{24}(h_1/h_2)+2\,(h_3)_1=\gamma\,. \qquad (42)$$

Da h_2/h_1 von u^4 unabhängig ist, können wir (15) und (16) in Differentialgleichungen für $H^1\,h_2$, $H^2\,h_2$ umschreiben, und analog (I) folgt:

$$H^2\,h_2=G(u^1,u^2)\cdot\cos\{\int h_3\,\mathrm{d}u^4+g(u^1,u^2)\}\,,$$
$$H^1\,h_2=G(u^1,u^2)\cdot\sin\{\int h_3\,\mathrm{d}u^4+g(u^1,u^2)\}\,. \qquad (43)$$

Daraus folgt unmittelbar (sofern ein kraftfreies Feld in dieser Konfiguration überhaupt existiert):

Ist h_2/h_1 von u^4 unabhängig, so ist die mit h_1 (bzw. h_2) multiplizierte Energiedichte des zugehörigen Magnetfeldes ebenfalls von u^4 unabhängig, ändert sich also in Richtung von grad a nicht. In diesem Sinne sind die kraftfreien Felder in Konfigurationen mit $(h_2/h_1)_4=0$ natürliche Verallgemeinerungen der ebenen Felder.

Kehren wir nun zur Gl. (41) zurück. Aus ihr folgt sofort:

a) *Ist im betrachteten Gebiet β identisch* 0, so existiert dort kein kraftfreies Feld, sofern γ nicht auch identisch verschwindet. Entsprechendes gilt natürlich bei $\gamma \equiv 0$.)

b) *Beide Koeffizienten verschwinden im betrachteten Gebiet nicht identisch.* Außerdem soll eine bestimmte Größe, falls das für eine Division erforderlich ist, im betrachteten Gebiet keine Nullstelle haben. Auf die sonst auftretenden Singularitäten wollen wir nicht näher eingehen.

Dann liefern (41) und (43)

$$-G\,h_3\,\beta\sin\{\textstyle\int h_3\,du^4+g\} = G\,h_3\,\gamma\cos\{\textstyle\int h_3\,du^4+g\},$$

oder, wenn wir $w=-\beta/\gamma$ schreiben

$$g=g(u^1,u^3)=\cot^{-1}w-\textstyle\int h_3\,du^4\,. \qquad (44)$$

Damit dieser Ausdruck für die Phasenfunktion g wirklich von u^4 unabhängig ist, muß w folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\frac{1}{1+w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial u^4}+h_3=0\,. \qquad (45)$$

Da w aus den metrischen Koeffizienten berechnet wird, stellt (45) eine zusätzliche Bedingung für h_1, h_2, h_3 dar.

Die Funktion $G=G(u^1,u^2)$ in (43) ist nicht willkürlich, sondern muß so gewählt werden, daß (14) erfüllt ist. Das liefert die folgende Gleichung:

$$\left\{G\left(\frac{h_1}{h_2}\right)_2+G_2\frac{h_1}{h_2}+G\,g_1+G\int(h_3)_1\,du^4\right\}\sin k=\left\{G_1-g_2\,G\frac{h_1}{h_2}-G\frac{h_1}{h_2}\int(h_3)_2\,du^4\right\}\cos k\,. \qquad (46)$$

Dabei wurde $\int h_3\,du^4+g=k=k(u^1,u^2,u^4)$ abgekürzt. Außerhalb neutraler Punkte kann (46) auf eine Differentialgleichung für $\ln G$ umgeschrieben werden. Da die Funktionen G, g von u^4 unabhängig sein müssen, folgen daraus die beiden notwendigen und hinreichenden Gleichungen:

$$(\ln G)_2\frac{h_1}{h_2}+\left(\frac{h_1}{h_2}\right)_2+g_1+\int(h_3)_1\,du^4=-\frac{h_1}{h_2}(\ln h_3)_2\cos^2 k-(\ln h_3)_1\sin k\cos k\,, \qquad (47)$$

$$(\ln G)_1-g_2-\frac{h_1}{h_2}\int(h_3)_2\,du^4=-(\ln h_3)_1\cdot\sin^2 \mathrm{k}-\frac{h_1}{h_2}(\ln h_3)_2\cdot\sin k\cos k\,. \qquad (48)$$

Es läßt sich sofort nachprüfen, daß wegen (44) und (45) lie oben definierten Ableitungen von $(\ln G)$ wie verlangt von u^4 unabhängig sind.

Für die weitere Behandlung schreiben wir (47), (48) unter Benutzung von (44) um und erhalten:

$$\frac{h_1}{h_2}(\ln G)_2+\left(\frac{h_1}{h_2}\right)_2-\frac{1}{1+w^2}\frac{\partial w}{\partial u^1}=-\frac{h_1}{h_2}(\ln h_3)_2-(\ln h_3)_1\frac{w^2}{1+w^2}\,,$$

$$(\ln G)_1+\frac{1}{1+w^2}\frac{\partial w}{\partial u^2}=-(\ln h_3)_1\frac{1}{1+w^2}-\left(\frac{h_1}{h_2}\right)(\ln h_3)_2\frac{w}{1+w^2}\,. \qquad (49)$$

Aus der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $(\ln G)$, also $(\ln G)_{12}=(\ln G)_{21}$, ergibt sich eine weitere Bedingung für w:

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\left\{-\frac{1}{1+w^2}\frac{\partial w}{\partial u^2}-(\ln h_3)_1\frac{1}{1+w^2}-\frac{h_1}{h_2}(\ln h_3)_2\frac{w}{1+w^2}\right\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial u^1}\left\{-\left(\ln\frac{h_1}{h_2}\right)_2+\frac{h_2}{h_1}\frac{1}{1+w^2}\frac{\partial w}{\partial u^1}-(\ln h_3)_2\frac{w}{1+w^2}-\left(\frac{h_2}{h_1}\right)(\ln h_3)_1\frac{w^2}{1+w^2}\right\}. \qquad (50)$$

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis:

Ist im betrachteten Gebiet $(h_2/h_1)_4$ identisch 0, verschwinden dort dagegen die gemäß (42) durch die metrischen Koeffizienten festgelegten Funktionen β, γ nicht identisch, so existiert genau dann ein kraftfreies Feld, wenn für $w=-\beta/\gamma$ die Bedingungen (45) und (50) gelten. In diesem Fall ist das (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig bestimmte Feld durch (43) gegeben. Die Richtung dieses Feldes ist über die Phasenfunktion (44) festgelegt, der Betrag durch die unmittelbar zu integrierenden Differentialgleichungen (49).

c) *Schließlich ist noch der Fall zu behandeln, daß β und γ überall im betrachteten Gebiet verschwinden.* Ist dann $(h_3)_1=0$, so muß das auch für $(h_3)_2$ gelten und umgekehrt. Daher unterscheiden wir:

c_1) *h_3 hängt im betrachteten Gebiet nur von u^4 ab,*

c_2) *h_3 hängt von u^1, u^2, u^4 ab.*

Andere Möglichkeiten gibt es nicht, wenn wir für c_1) auch den Fall $(h_3)_4 = 0$ zulassen.

Zu c_1):

In diesem Fall müssen die Flächen $u^4 = \text{const}$ Ebenen- oder Kugelflächenstücke sein. Denn wegen $h_3 = h_3(u^4)$ sind die u^4-Linien Geraden und die Flächen $u^4 = \text{const}$ Parallelenflächen

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1(u^1, u^2) + \int_{u_0^4}^{u^4} h_3(u^4)\, \mathrm{d}u^4\, \mathfrak{e}(u^1, u^2).$$

Dabei beschreibt der Ortsvektor $\mathfrak{r}_1(u^1, u^2)$ die Fläche $u^4 = u_0{}^4$; $\mathfrak{e}(u^1, u^2)$ ist der Normalenvektor auf $u^4 = u_0{}^4$ im Punkt (u^1, u^2). Da das Koordinatennetz u^1, u^2 ein Krümmungsliniennetz bildet, sind die Hauptkrümmungen χ_i in $(u^1, u^2, u_0{}^4)$ durch

$$\chi_i = -\frac{\partial}{\partial u^4} (\ln h_i) \Big|_{u^4 = u_0{}^4} \tag{51}$$

gegeben. Wegen $(h_1/h_2)_4 = 0$ folgt

$$\chi_1 = \chi_2 . \tag{52}$$

Daher besteht die im betrachteten Gebiet liegende Fläche $u^4 = u_0{}^4$ nur aus Nabel- und Flachpunkten, ist also ein Stück einer Ebene oder Kugel, und wegen der Parallelität gilt das dann auch für die ganze Flächenschar $u^4 = \text{const}$. Die entsprechenden kraftfreien Felder sind schon eingehend [11] behandelt worden.

Zu c_2):

Zur Bestimmung der Funktionen G, g müssen die komplizierten Ausdrücke (48) benutzt werden. Eine analytische Behandlung ist ziemlich schwierig. Da dieser Fall andererseits sehr speziell ist, wollen wir auf seine weitere Diskussion verzichten.

V. Wahl des Koordinatensystems

Die Betrachtungen in Abschn. II bis IV sind nur dann anwendbar, wenn die Voraussetzung erfüllt ist, daß wir die Flächen $\alpha = \text{const}$ in ein dreifach orthogonales Flächensystem einbetten können. Nun muß der Satz von DUPIN [22] gelten, der besagt, daß sich die Flächen eines solchen Systems paarweise in Krümmungslinien schneiden. Nach DUSCHEK [23] folgt daraus, daß eine Einbettung einer beliebigen Flächenschar nicht möglich zu sein braucht. Das bedeutet zwar, daß die obigen Betrachtungen nicht auf jedes α anwendbar sind. Andererseits ist die Zahl der Klassen von α, die mit der obigen Methode behandelbar sind, noch so groß, daß im Hinblick auf Modellkonstruktionen eine hinreichend große Flexibilität gegeben ist.

Fallen die Flächen $\alpha = \text{const}$ mit der Koordinatenflächenschar eines bekannten Orthogonalsystems zusammen, so empfiehlt es sich, zunächst in dieses Koordinatensystem überzugehen. In diesem Fall erhalten wir ein Differentialgleichungssystem wie in (12) – (14), wobei statt u^3 jetzt $\alpha(u^3)$ auftritt. Durch eine anschließende Transformation

$$u^4 = \int \alpha(u^3)\, \mathrm{d}u^3$$

ergibt sich wieder das System (14) – (16). Der Vorteil eines solchen Vorgehens liegt darin, daß die metrischen Koeffizienten nicht erst berechnet werden müssen.

Allgemeine Aussagen über die Einbettbarkeit der Flächen $\alpha = \text{const}$ in ein Orthogonalsystem sind möglich, wenn diese Flächen „parallel“ sind, d. h. wenn in entsprechenden Punkten der einzelnen Flächen die Normalen gleich sind. In diesem Fall ist zumindest lokal die Existenz eines dreifach orthogonalen Flächensystems durch den Satz von DARBOUX [22] gesichert.

Außerdem ist die Einbettung für alle „ebenen“ α, d. h. für alle $\alpha = \alpha(x, y)$ durchführbar (x, y, z seien kartesische Koordinaten). Denn dann sind die Feldlinien des Potentialfeldes grad α (die wegen unserer Voraussetzungen über α sicher berechenbar sind) Kurven, die in Ebenen $z = \text{const}$ liegen, also in jeder solchen Ebene durch $g = g(x, y)$ gegeben sind. Auf Grund der Definition von g sind in $z = \text{const}$ die Kurven $g = \text{const}$ und $\alpha = \text{const}$ orthogonal. Daher bilden die zu den Ebenen $z = \text{const}$ senkrechten „verallgemeinerten“ Zylinder $\alpha = \text{const}$ und $g = \text{const}$ zwei paarweise orthogonale Flächenscharen, und die Flächen $z = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, $g = \text{const}$ bilden ein dreifach orthogonales Flächensystem.

VI. Beispiele

Das in den Abschn. II bis IV Dargestellte soll an einigen Beispielen erläutert werden.

[22] D. LAUGWITZ, Differentialgemetrie, B. G. Teubner, Stuttgart 1960.

[23] A. DUSCHEK, Vorlesungen über höhere Mathematik 2, Springer-Verlag, Wien 1958, S. 366.

Betrachten wir zuerst den Fall, es sei in einem zylindrischen Koordinatensystem r, φ, z $\quad a = a(r)$ gegeben. Wir gehen gemäß V. zu Zylinderkoordinaten über und schreiben: $u^1 = \varphi$, $u^2 = z$, $u^3 = r$; u^4 ist dann durch $u^4 = \int a(r)\, dr$ gegeben. Für die metrischen Koeffizienten erhalten wir:

$$h_1 = u^3 = h_1(u^4), \qquad h_2 = h_3 = 1 .$$

Es liegt also der Fall III a vor. Daher gilt: Das Magnetfeld kann nur von u^4, also von r abhängen. Die Flächen $\mathfrak{h}^2 = \text{const}$ sind Kreiszylinder mit der z-Achse als erzeugende Gerade. Zur Integration von (27) müssen wir a spezialisieren, etwa:

$$a = q\, r^n, \qquad q = \text{const}, \qquad n \neq 0 . \tag{53}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} u_5 &= \int \frac{h_3 h_1}{h_2}\, du^4 = \int h_1\, a(r)\, dr \\ &= q \ln r , \qquad\qquad n = -2 , \\ &= q^{1/(n+2)} \cdot r^{n+2} , \quad n \neq -2 . \end{aligned} \tag{54}$$

Das bedeutet

$$r = \begin{cases} \exp\{u^5/q\} , & n = -2 , \\ [(n+2)/q]^{1/(n+2)} \cdot (u^5)^{1/(n+2)} , & n \neq -2 . \end{cases} \tag{55}$$

Mit (27) ergibt sich:

$$(H^1 r)_{55} + \begin{cases} \exp\{-2\, u^5/q\} , & n = -2 \\ [q/(n+2)]^{2/(n+2)} \cdot (u^5)^{-2/(n+2)} , & n \neq -2 \end{cases} \Bigg\} (H^1 r) = 0 .$$

Die Lösungen lassen sich unmittelbar hinschreiben:

$n = -2$:

$$H^1 r = Z_0(q \exp\{-u^5/q\}) .$$

Dabei ist Z_ν die ν-te Zylinderfunktion.

$n = -1$:

$$H^1 r = \begin{cases} c_1 (u^5)^{\frac{1}{2}+s} + c_2 (u^5)^{\frac{1}{2}-s} & ; \quad 1 - 4\, q^2 > 0 , \\ c_1 (u^5)^{\frac{1}{2}} + c_2 (u^5)^{\frac{1}{2}} \ln u^5 & ; \quad 1 - 4\, q^2 = 0 , \\ c_1 (u^5)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(s \ln u^5 + c_2) & ; \quad 1 - 4\, q^2 < 0 . \end{cases}$$

Dabei ist $2\, s = \sqrt{|4\, q^2 - 1|}$.

$n \neq -2, \; \neq -1$:

$$H^1 r = \sqrt{u^5}\, Z_{1/2m} [q/(n+2)]^{1/(n+2)} \frac{(u^5)^m}{m}$$

Dabei ist $m = (n+1)/(n+2)$.

Die Rücktransformation liefert schließlich:

$n = -2$:

$$H^1 = (1/r)\, Z_0(q/r) ;$$

$n = -1$:

$$H^1 = \begin{cases} c_1 (r)^{-\frac{1}{2}+s} + c_2 (r)^{-\frac{1}{2}-s} & ; \quad 1 - 4\, q^2 > 0 , \\ c_1 (r)^{-\frac{1}{2}} + c_2 (r)^{-\frac{1}{2}} \ln r & ; \quad 1 - 4\, q^2 = 0 , \\ c_1 (r)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(s \ln r + c_2) & ; \quad 1 - 4\, q^2 < 0 , \end{cases}$$

sonst

$$H^1 = r^{-n/2}\, Z_{(n+2)/(2n+2)} \cdot \{[q/(n+1)]\, r^{n+1}\} . \tag{56 a}$$

H^2 ergibt sich jeweils mit 13:

$$H^2 = \frac{r^{-(n+1)}}{q} \frac{d}{dr} (H^1 r) . \tag{56 b}$$

[24] P. Moon u. D. E. Spencer, Field Theory Handbook, Springer-Verlag, Berlin 1961.

Damit sind zu $a = q\, r^n$ schon ale kraftfreien Magnetfelder bestimmt. Für $n = -1$ ergibt sich das bekannte Ergebnis von Henriksen [7], sofern $q^2 \neq \frac{1}{4}$. Für $q = \frac{1}{2}$ fehlt dort die zweite Grundlösung $r^{-1/2} \ln(r)$.

Im zweiten Beispiel wollen wir mit Hilfe des Falles III b$_1$) Klassen von a angeben, zu denen es kein kraftfreies Feld gibt. Dazu betrachten wir in den Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids (Abb. 1) ein a mit der Abhängigkeit $a = a(\theta)$.

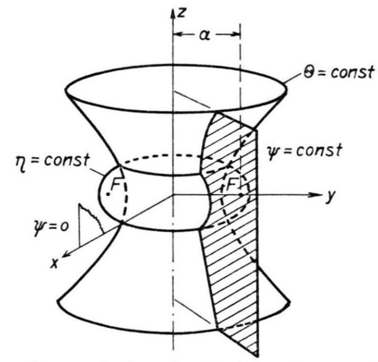

Abb. 1. Koordinatenflächen für die Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids.

Wählen wir: $u^1 = r$, $u^2 = \eta$, $u^3 = \theta$, so ist [24]

$$(h_1)^2 = a^2 (\cosh u^2)^2 (\sin u^2)^2,$$
$$(h_2)^2 = (h_3)^2 = a^2 [(\cosh u^2)^2 - (\sin u^3)^2]$$

($2\, a$ ist der Brennpunktabstand; s. Abb. 1).

Daraus folgt: h_1/h_2, h_3 sind von u^1 unabhängig. Weiter ist $h_3 h_1/h_2 = h_1$, zerfällt also in ein Produkt einer Funktion von u^2 und einer von u^4. Nach V. ist u^4 durch $u^4 = \int a(\theta)\, d\theta$ gegeben.

Andererseits gilt

$$(h_3)_2 = \frac{a^2}{h_3} \cosh u^2 \sinh u^2,$$
$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_4 = -\frac{h_1}{h_2} \frac{\cos u^3}{(\sin u^3)^3} \frac{1}{\alpha(u^3)}.$$

(Wir nehmen an, daß wir solche Punkte betrachten, in denen die obigen Ausdrücke nicht singulär werden.) Das liefert:

$$\frac{(h_3)_2}{(h_2/h_1)_4} = -a^2 \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\alpha(u^3)(\sin u^3)^3}{\cos u^3} \cosh u^2 \sinh u^2$$
$$= g^5(u^3) \sinh u^2. \tag{57}$$

Die beiden ersten Eigenschaften der metrischen Koeffizienten zeigen, daß das vorliegende Problem gemäß III b_1) zu behandeln ist. Dort wurde bewiesen, daß Lösungen genau dann existieren, wenn die weitere Bedingung (35) erfüllt ist. (57) zeigt jedoch, daß (35) nicht gelten kann, da der fragliche Quotient bei jeder Wahl von $\alpha(\theta)$ von u^2, also η abhängt. Daher kann es zu $\alpha = \alpha(\theta)$ keine kraftfreien Felder geben. (Die oben ausgeschlossenen Singularitäten ändern daran nichts.) Anschaulich bedeutet dieses Ergebnis: Es existiert kein kraftfreies Magnetfeld mit der Eigenschaft, daß das Verhältnis Stromstärke zu Magnetfeldstärke genau auf einer Schar konfokaler einschaliger Hyperboloide konstant ist.

Diese Aussage ist auch für den Fall $\alpha = \text{const}$ richtig. Das liegt daran, daß das Gleichungssystem (14) – (16) für $\alpha = \text{const}$ gilt, wenn ein Feld *bestimmter Geometrie* gesucht wird. Fragen wir nämlich bei $\alpha = \text{const}$ nach Feldern, deren Feldlinien in den Koordinatenflächen eines dreifachen Orthogonalsystems liegen, so werden wir zu den entsprechenden Koordinaten übergehen, also ein Gleichungssystem (12) – (14) erhalten, in welchem allerdings statt u^3 das konstante α auftritt.

Die Transformation $u^4 = \alpha u^3$ liefert wieder (14) bis (16). Der Vorteil der in dieser Arbeit geschilderten Methode liegt also darin, daß zu *vorgegebener Geometrie* bei *beliebigem* α einmal entschieden werden kann, ob kraftfreie Felder überhaupt existieren, und zum anderen, daß diese aus den angegebenen Formeln sofort berechnet werden können. So gelten die Rechnungen des ersten Beispiels auch für das dort ausgeschlossene $n = 0$, also $\alpha = \text{const}$. In diesem Fall liefert (56) das bekannte, zuerst von LUNDQUIST [1] angegebene Feld, wenn wir als Zylinderfunktionen die Bessel-Funktionen wählen.

Das obige Beispiel der Nichtexistenz kraftfreier Felder auf konfokalen einschaligen Hyperboloiden ist deswegen interessant, weil es zeigt, wie kritisch die Frage der Existenz an die Feldgeometrie geknüpft ist: Schon eine noch so geringe Verformung von zylindrischen Feldflächen in Hyperboloide bedingt, daß ein ursprünglich kraftfreies Feld nichtkraftfrei wird.

Es lassen sich leicht weitere Geometrien finden, in denen keine kraftfreien Felder existieren. Ohne Rechnung sei angegeben, daß das für Felder gilt, deren Feldlinien in den Halbebenen $\Phi = \text{const}$ eines zylindrischen Systems liegen sollen oder auch für solche, deren Linien die sphärischen Kegel eines Torus-Koordinatensystems [24] bedecken sollen.

Herrn Prof. Dr. E. RICHTER bin ich für viele anregende Gespräche zu herzlichem Dank verpflichtet.